



ESTUDO EFEITO DO ACOPLAMENTO DE ROTAÇÃO-TRANSLAÇÃO SOBRE O MOVIMENTO DE ESFERAS SOBRE UMA BRAQUISTÓCRONA

João Vitor Vitosoaski¹; Emerson Luiz Lapolli²

INTRODUÇÃO

Apesar das retas serem a distância mais curta entre dois pontos, existem situações que esta forma de trajetória não é a mais rápida entre estes mesmo dois pontos. No desafio proposto por Johann Bernoulli e solucionado por ele mesmo, utilizando o teorema de Fermat, é uma destas situações: *Dados dois pontos A e B em níveis diferentes e não sobre a mesma vertical, determinar o caminho em que uma partícula móvel vai de A até B em tempo mínimo, assumindo que sua aceleração é apenas devida à gravidade* (Johann Bernoulli) [1 p. 392]. Na verdade, o caminho que é a solução deste desafio, é uma curva que produz o deslocamento mais rápido dentre as curvas existentes, ou seja, uma braquistócrona. O aspecto histórico que envolve a prova que a cicloide era realmente uma braquistócrona, é extremamente interessante, pois envolveram muitos cientistas renome do século XVII, e uma disputa de autoria entre os irmãos Bernoulli [2-5]. Conforme [3 p. 21], “a curva que responde o problema colocado é rica em propriedades curiosas e por gerar tantas controvérsias foi chamada “a Helena da geometria” ou “o pomo da discórdia”.

A curva cicloide tem vários pseudônimos, além do mencionado, devido aos fenômenos físicos propiciados por esta. Isócrona: O tempo de deslocamento de uma partícula sob qualquer fração da cicloide, sob efeito da gravidade e sem atrito, é sempre o mesmo; Tautócrona: Curva isócrona onde o tempo de deslocamento independente da amplitude.

¹ Aluno do segundo ano do curso técnico integrado em informática do Instituto Federal Catarinense, Campus Videira -mail: joao.cz@hotmail.com

² Professor Orientador do departamento de eng. elétrica do Instituto Federal Catarinense, Campus Videira. E-mail: emerson.lapolli@ifc.edu.br



Comumente as demonstrações, sobre a propriedade de Braquistócronismo, Tautocronismo e Isocronismos da cicloide, existentes utilizam esferas. Já é bem sabido que o efeito do acoplamento translação-rotação, surte um efeito diferente sobre o tempo de percurso, do que somente se considerar translação pura, além disso o atrito estático é um fator preponderante no acoplamento translação rotação, o que é desprezado nos estudos que consideram translação pura.

Não averiguado durante o levantamento do estado da arte, estudos comparativos entre movimento de esferas, sobre a cicloide, considerando o acoplamento rotação-translação, bem como a dedução das equações de movimento e suas soluções, as equações horárias, sobre cada um dos perfis.

Com isso, o presente trabalho vem estudar teoricamente e experimentalmente o movimento de esferas sobre uma cicloide, levando em conta o acoplamento rotação-translação (rolamento) realizando uma comparação com o movimento de partícula sobre o mesmo perfil.

REFERENCIAL TEÓRICO

4.1 Acoplamento translação-rotação.

Este efeito é caracterizado quando um objeto com superfície circular (Esferas, cilindros, etc), rola, sem deslizar, sobre uma superfície. Não há movimento relativo em entre os pontos de contatos, ou seja, sem deslizamento, assim, o atrito estático entre as superfícies, é responsável pelo torque sobre o centro de massa. Este torque faz com que o objeto gire ao em torno de seu centro de massa, e simultaneamente, o faz deslocar com velocidade de translação igual velocidade tangencial. Então, este acoplamento, provocado pelo atrito estático, vincula o movimento de rotação ao de translação ocasionado o movimento de rolamento sem deslizamento [6,7].

Em nosso estudo, para desenvolvimento da teoria, será considerado movimento de rolamento sem deslizamento. As esferas partirão do repouso e serão propelas pela ação da gravidade sobre rampas com perfis de diferentes formatos. A rotação influencia no tempo de percurso sobre as rampas, devido a distribuição da



massa ao entorno do ponto de giro, neste caso o centro de massa. A forma de como esta distribuição de massa se dá, é definido pelo momento de inércia (I) que definitivamente influencia no movimento de rotação. Desta forma o tempo de percurso sobre as rampas em se considerando rolamento sem deslizamento, será diferente do tempo quando considerado translação pura.

4.2 Equações de movimento.

O formalismo lagrangeano que será descrito a seguir, foi estabelecido através do cálculo variacional, sendo que um dos fatores que contribuíram com seu desenvolvimento, foi a solução para o problema da Braquistócrona estabelecido por Johann Bernoulli. Para determinar as equações de movimento, das esferas sobre cada perfil, iremos utilizar a mecânica lagrangeana, que utiliza um formalismo matemático extremamente robusto que nos permite determinar toda a dinâmica de um sistema em questão sem recorrer a vetores [8]. O ponto de partida é a função chamada de Lagrangeana (1), que determina a condição que minimiza a grandeza chamada de ação estabelecendo o melhor caminho entre dois pontos. A lagrangeana é definida em termos a diferença entre a energia cinética (T) e energia e energia potencial (U) do sistema em questão,

$$\mathcal{L} = T - U \quad (1)$$

Considerando as posições do centro de massa (X, Y) a energia cinética total é a energia cinética de translação (2) em duas dimensões mais a de rotação (3) [14].

$$T_t = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) \quad (2)$$

$$T_r = \frac{I}{2}\omega^2 \quad (3)$$

Com m sendo a massa da esfera, \dot{X} e \dot{Y} as velocidades cartesianas do centro de massa, ω e I sendo respectivamente a velocidade angular e momento de inércia. Para esferas maciças o momento de inércia sobre o centro de massa é escrito como

$$I = c m a^2 \quad (4)$$

onde a é o raio da esfera e c é um valor denominando coeficiente de inercia que depende da geometria do corpo que rola. Como estamos considerando rolamento sem deslizamento, obtemos os seguintes vinculo:



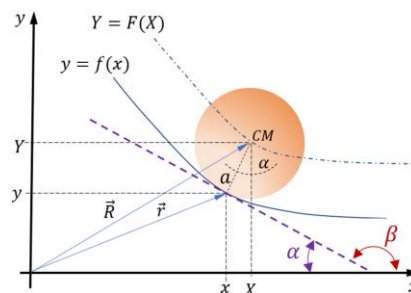
$$v^2 = (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) = (a\omega)^2 \quad (5)$$

Assim a lagrangeana adquire a seguinte forma.

$$\mathcal{L} = (c + 1) \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - mgY \quad (6)$$

A trajetória no centro de massa da esfera (X, Y)) apresenta a mesma topologia da curva do perfil da rampa (x, y) pois, serão paralelas. Assim podemos utilizar como vínculo, a função que descreve o perfil da rampa, juntamente com o raio da esfera a para determinar a trajetória do centro de massa.

Figura 1: Esquema da geometria e de coordenadas da esfera sobre o perfil de uma rampa com perfil genérico.



Fonte: O coordenador.

Levando em conta a geometria apresentada na figura acima, temos que: A curva cicloide do perfil é descrita pela equação paramétrica

$$x = \frac{1}{\pi}(\theta - \text{sen}\theta) \quad (7)$$

$$y = -\frac{1}{\pi}(1 - \text{cos}\theta) \quad (8)$$

O qual é denominado de **vínculo**, pois guia o rolamento da esfera, e por consequência definirá a trajetória (X, Y) .

$$X = a \sin \alpha + \frac{1}{\pi}(\theta - \text{sen}\theta) \quad (9)$$

$$Y = a \cos \alpha - \frac{1}{\pi}(1 - \text{cos}\theta) \quad (10)$$

Onde a é o raio da esfera, θ é Angulo da geratriz da cicloide e α é o ângulo, com a horizontal, da tangente da curva no ponto onde a esfera toca. Além do mais, temos o segundo vínculo, que ainda não foi explorado em problemas de rampas com perfiz



diferenciados. Este vínculo é a própria definição de derivada.

$$\tan \beta = -\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (11)$$

Onde α é o menor ângulo com a horizontal da reta tangente a curva no ponto onde a esfera toca. Assim, podemos escrever a lagrangeana em termos de uma única variável α . Assim é possível obter a relação entre os ângulos θ e α envolvidos no movimento $\theta = \pi + 2\alpha$. Assim, a lagrangeana para o sistema adquire a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(c+1)(a-4r\cos\alpha)^2\dot{\alpha}^2 - mg[a\cos\alpha - r(1+\cos 2\alpha)] \quad (12)$$

Com isso aplicando a equação de Euler-Lagrange (16) sobre a Lagrangeana

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0 \quad (13)$$

Estabelecemos a equação de movimento para a evolução do ângulo α .

$$(a-4r\cos\alpha)\ddot{\alpha} + 4r\sin\alpha\dot{\alpha}^2 - \frac{g}{c+1}\sin\alpha = 0 \quad (14)$$

A equação acima é uma EDO não linear, onde temos a aceleração $\ddot{\alpha}$ e velocidade $\dot{\alpha}$ referente ao ângulo tangente α . Utilizando método numérico Hunge-kutta 4 e 5 dimensões resolvemos a equação para os valores de α para cada valor de tempo, por consequência, obtemos os valores das coordenadas do centro de massa X e Y pelas equações dadas anteriormente.

$$X = a\sin\alpha + r(\pi - 2\alpha - \sin 2\alpha) \quad (15)$$

$$Y = a\cos\alpha - r(1 + \cos 2\alpha) \quad (16)$$

Para possibilitar o estudo do tautocronismo, foi estabelecido as equações para determinar o tempo de queda t_q para delimitar a evolução na construção dos gráficos a partir das condições iniciais estabelecidas. Adotando a metodologia utilizada em [2], o tempo de queda para o centro de massa de esferas rolando é

$$t_q = \sqrt{\frac{c+1}{2g}} \int_{X_0}^X \sqrt{\frac{1 + (dY/dX)^2}{(Y_0 - Y)}} dX \quad (17)$$

Assim com base nas equações paramétricas (15) e (16) obtemos

$$t_q = \sqrt{\frac{c+1}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{4r\cos\alpha + a}{\sqrt{a(\cos\alpha + \cos\alpha_0) + 2r(\cos^2\alpha - \cos^2\alpha_0)}} d\alpha \quad (18)$$



Onde α_o é ângulo de partida sendo $\pi/2 \leq \alpha_o \leq 0$. Foi resolvida como os valores da condição inicial e da esfera com auxílio de um programa de matemática.

Consideram uma partícula, $a = 0$, em translação, $c = 0$, partindo do ponto de máximo $\alpha_o = \pi/2$ a equação para o tempo de queda tem solução analítica trivial e recai sobre o que consta na literatura.

$$t_q = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \quad (19)$$

A resolução analítica integral, quando da equação diferencial, será desenvolvida em um outro artigo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para atingir o objetivo trabalho foram estabelecidas 4 etapas as quais serão descritas a baixo.

Etapa 1 – Construção do perfil da Ciclóide

Figura 2: Imagens do processo de obtenção do perfil de cicloide estudado.



Fonte: O coordenador e bolsista.

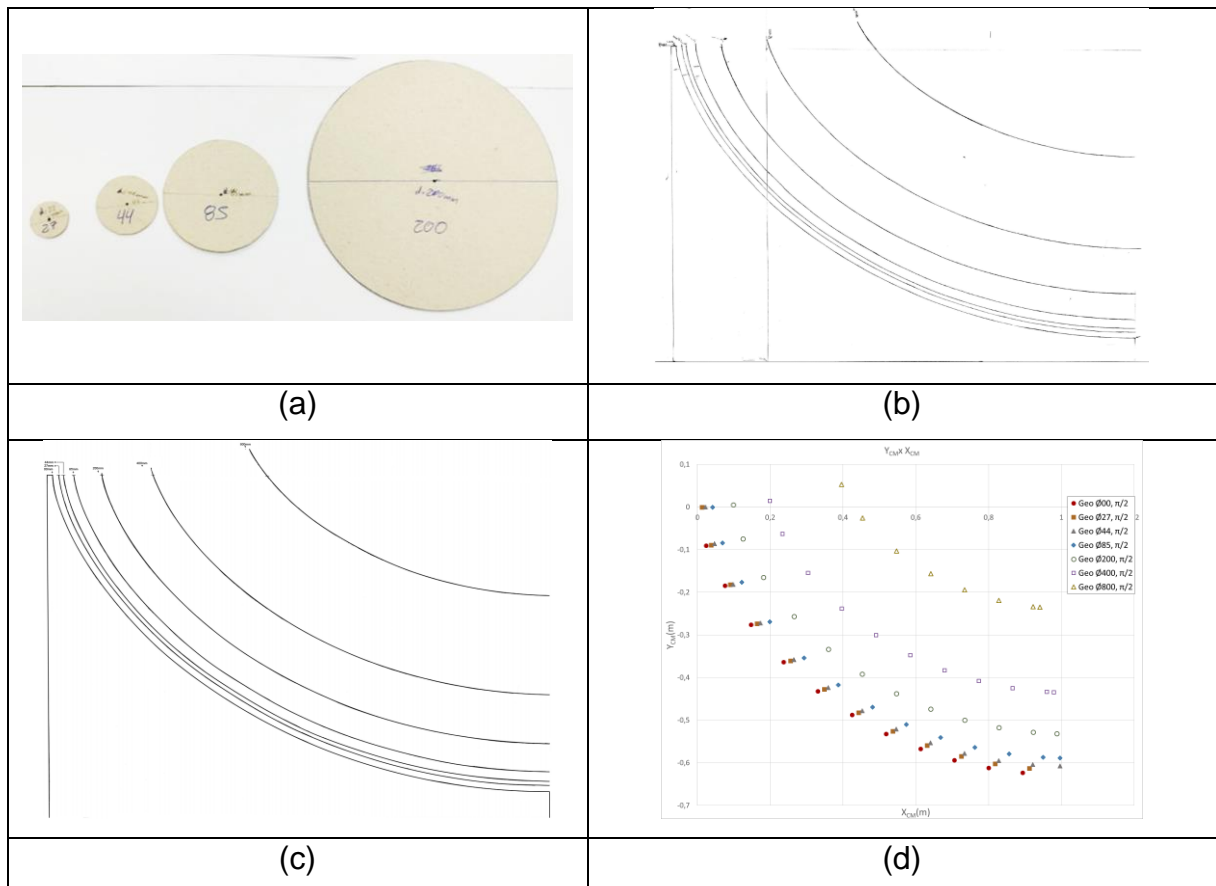


Epata 2 – Traçado geométrico do centro de massa – Utilizando um dos perfis do par recortado, como base para desenhar a trajetória de diferentes diâmetros de círculos cortados em papel cartão. O perfil foi primeiramente posicionado sobre uma cartolina branca, e ajustado de maneira que as base e lateral ficassem paralelas e sobre as arestas da cartolina.

Em seguida, para obter o desenho do traçado da trajetória sobre a cartolina, foi colocado um círculo de papel cartão, apoiado sobre o perfil, colocado uma caneta no centro. Ao deslizar o círculo sobre o perfil, a caneta desenhou a trajetória do centro de massa referente a diâmetro desejado. Foram estabelecidos no estudo dos diâmetros de 20, 44, 84, 200, 400, e 800 mm, para os modelos de papelão (figura 3a).

O desenho das trajetórias foi escameada (figura 3b) com auxílio de aplicativo de Smartphone e filtradas em aplicativo de imagem (figura 3c) *decktop* para realçar as linhas.

Figura 3: Imagens referentes a etapa 2.



Fonte: O coordenador e bolsista.

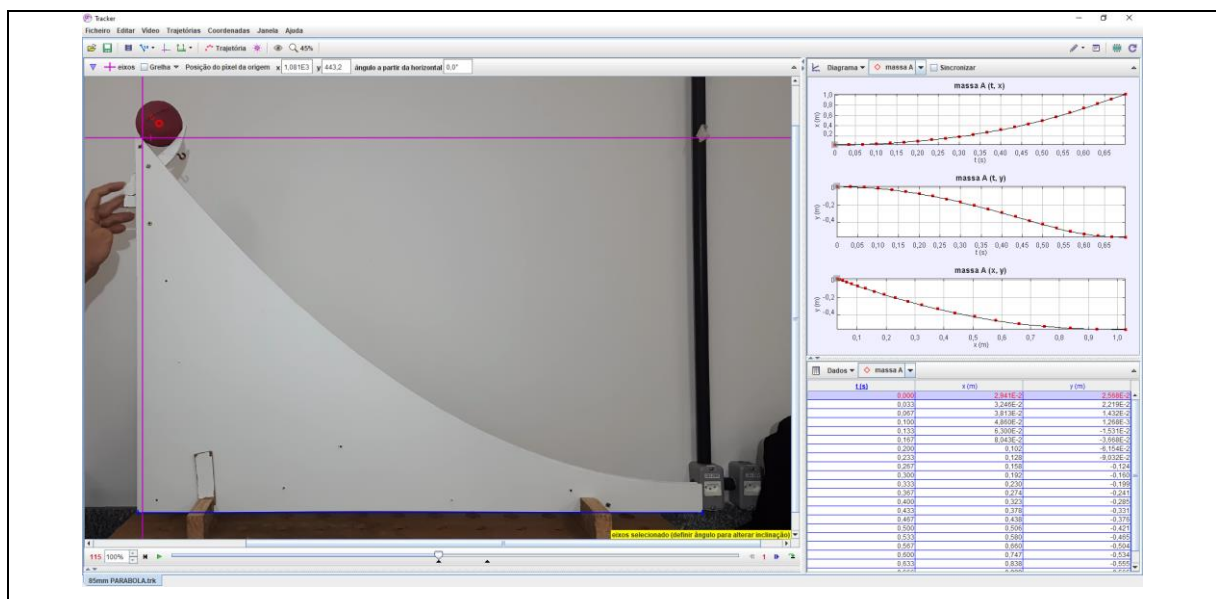
Com a imagem melhorada, foi extraídos os pontos (X,Y) da trajetória geométrica, com *WebPlotDigitizer*, das trajetórias traçadas, para gerar os gráficos (figura 3d). Para obtenção dos pontos foi definido como origem o ponto mais alto da curva.

Etapa 3 – Medidas experimentais da dinâmica e da trajetória.

Utilizando a comera de vídeo foi filmado as esferas em 4 diâmetros: 27, 44, 84, 200 mm, sendo o diâmetro maior uma casca esférica (Bola de *Voley*) e as demais maciças. rolado sobre o perfil.

Em seguida foi utilizado o programa de vídeo análise TRACKE (*open Source*) (figura 4) foram coletados os dados do movimento das esferas, para gerar os gráficos $X \times t$, $Y \times t$ e $Y \times X$, com auxílio de planilhas .

Figura 4: Imagens referente a etapa 3.



Fonte: O coordenador e bolsista.

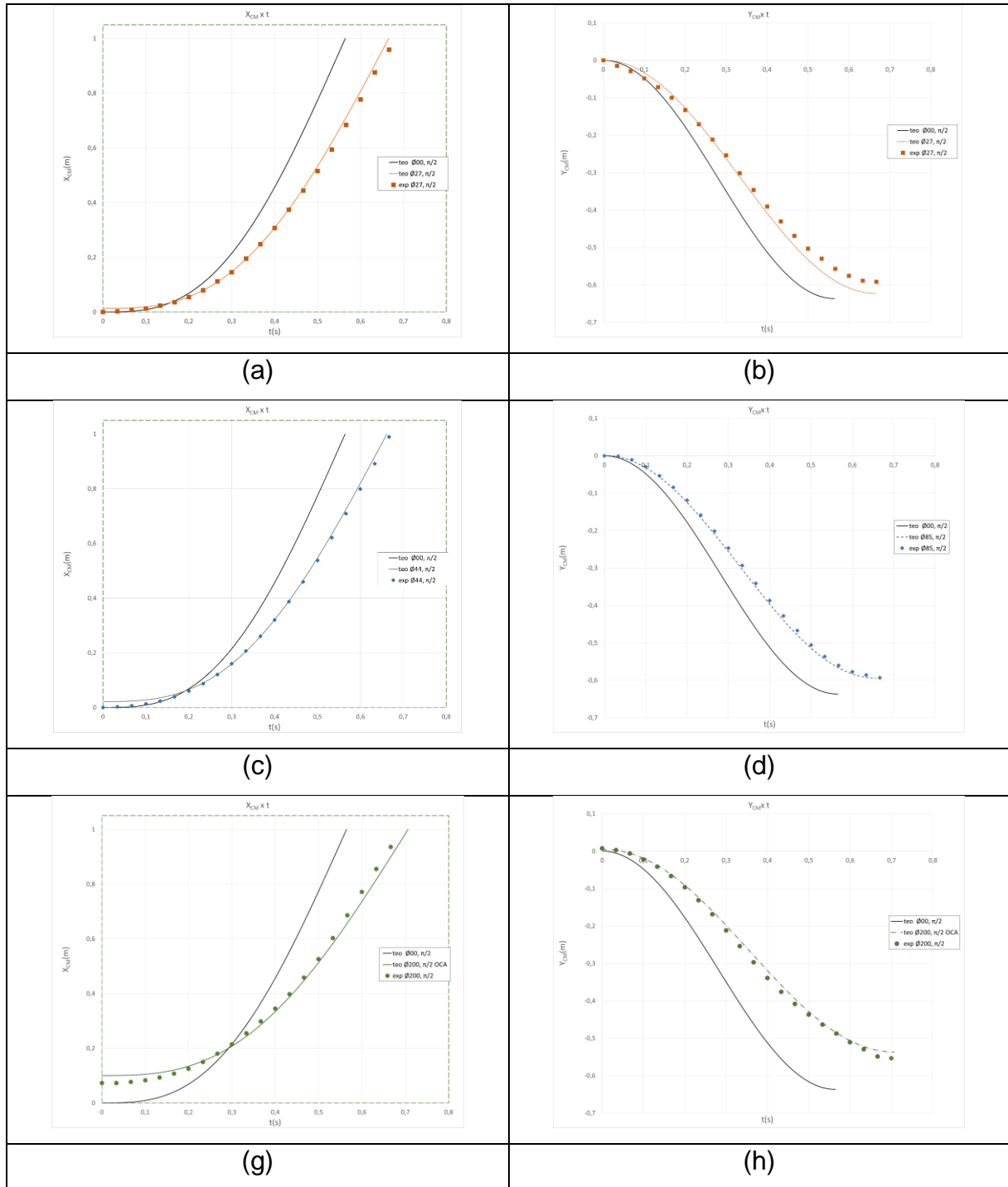
Etapa 4 – Desenvolvimento do modelo Teoria. Foi estabelecida a teoria já apresentado no referencial teórico.

Etapa 5 – Validação do modelo Teoria. Foi realizado as comparações com os dados experimentais e geométricos, e verificado os limites de aplicação.



RESULTADOS E DISCUSSÕES

Figura 5: Gráficos da evolução temporal, teórico e experimental das coordenadas do centro de massa para diferentes diâmetros (a) e (b) 27 mm; (c) e (d) 44 mm; (e) e (f) 85 mm; (g) e (h) 200 mm (esfera oca).



Fonte: O coordenador e bolsista.

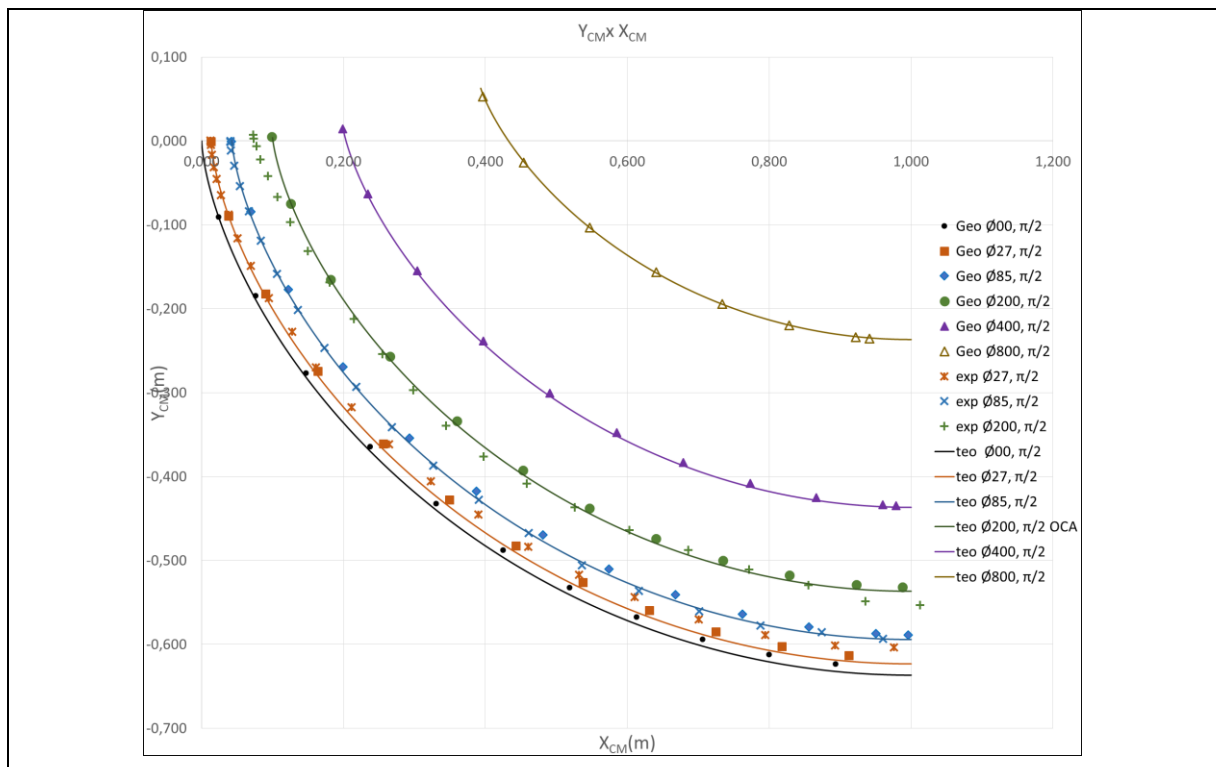


Durante a as filmagens foi verificado a câmara do Smartphone deve estar enquadramento próximo e paralelos a base e lateral do perfil. Isto para não haver problemas na relação de escalas dos dados com de experimento.

Para estabelecer o modelo teórico, foi realizado um comparativo entre os dos gráficos de comportamento temporal, das coordenadas de centro de massa, já corrigidas, com os experimentais e partículas, considerando o pondo de partida a origem ($\alpha_o = \pi/2$). Verifica-se que o comportamento entre os dados gerados pelo modelo, e os gerados pelo experimento, são condizentes, e diferentes do comportamento de partícula (linha escura). No entanto ao comparar o comportamento de partícula, com as demais esferas, fica perceptível a diferença no tempo de queda.

Analisando a trajetória por comparação entre a geométrica, experimental e Teoria, verificamos que a teoria é condizente. Como verifica-se no gráfico da figura 8 os diâmetros de 400 mm e de 800 mm não apresentam dados experimentais, somente geométrico, e confirmam que a teoria está condizente com os geométricos.

Figura 6: Imagem com o comparativo entre as trajetórias, teóricas experimentais e geométricas.



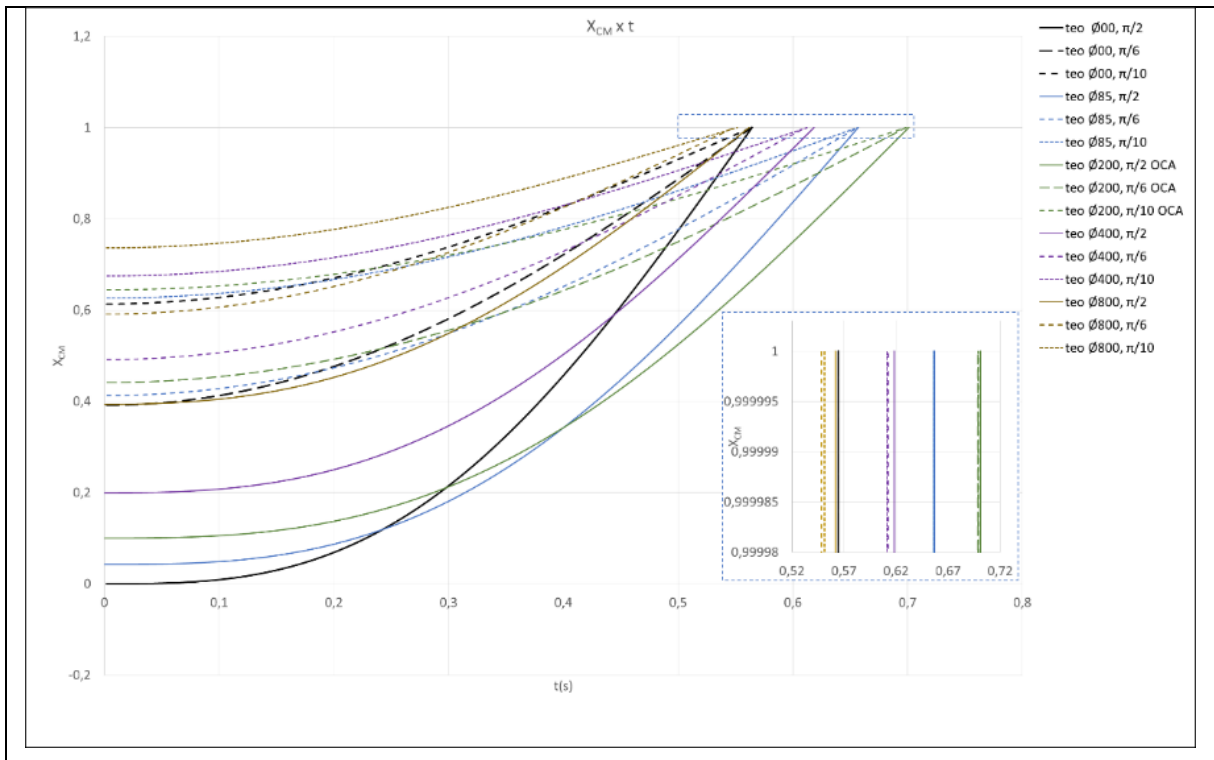
Fonte: O coordenador e bolsista.



Em se validando o modelo, podemos partir para a análise as propriedades da cicloide, e a primeira é a tautocronia. O objetivo é avalia se esta propriedade é mantida em se utilizando esferas partindo de duas diferentes alturas inferiores ao ponto de máximo $\alpha_o = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (x, y) = (0,0)$, neste caso, $\pi/6$ e $\pi/10$.

Verifica-se que a tautocronia só ocorre para partículas, para cada diâmetro, condições iniciais diferentes, não ocorre. No entanto mantendo o diâmetro e alterando as condições iniciais, a mudança no tempo de queda é imperceptível, mas ocorre, como verifica-se no detalhe.

Figura 9: Imagem com gráficos com a evolução temporal da coordenadas X com diferentes diâmetros nas condição de partida $\pi/6$ e $\pi/10$.



Fonte: O coordenador e bolsista.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi verificado no estudo que a rotação influencia no tempo de queda e que o efeito do autoctonismo é exclusivo de partículas. O modelo teórico está condizente



com a os experimentos dinâmicos e geométricos, no entanto há a necessidade do ajusta no tempo, quando se utiliza $\alpha_o = \pi/2$, pois não se sabe o valor verdadeiro do ângulo de partida. Esta impossibilidade é decorrente de como as esferas se acomodam sobre a cicloide ocasionado um estudo dedicado.

A equação de movimento do modelo foi resolvida neste trabalho utilizando métodos numéricos e a obtenção da solução analítica requer, também, um estudo dedicado.

Foi verificado no estudo que a rotação influencia no tempo de queda e que o efeito do autoctonismo. Uma conclusão prévia é tautocronia é uma propriedade somete de partículas sobre a cicloide, no enteando é necessário uma averiguação se esta propriedade se manifesta para esferas somete com translação.

REFERÊNCIAS

[1] J.D Struik (ed.), A Source Book in Mathematics 1200-1800 (Princeton University Press, Princeton, 1986) [Versão inglesa do enunciado publicado em latim na Acta Eruditorum 6, Leipzig, June, 1696, p.269].

[2] FERREIRA FILHO, Luís Gonzaga; ANDRADE, Marco Antonio de. Uma abordagem geométrica ao problema da braquistócrona. 2015. Universidade do Estado do Rio

de Janeiro. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/82962625_Uma_abordagem_geometrica.

Acesso em 29 de novembro de 2021.

[3] TAGLIOLATTO, A. L. S. Braquistócrona. - Rio Claro, 2015. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Disponível em:

<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/138443/000864520.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em 29 de novembro de 2021.

[4] CASTRO, Leonardo Miranda de. O cálculo variacional e as curvas cicloidais. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade de Brasília, Brasília, 2014.



https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/17194/1/2014_LeonardoMirandadeCastro.pdf. Acesso em 30 de novembro de 2021.

[5] FIRMINO, E.G, et al. Cicloide: uma abordagem sobre as propriedades tautócrona e braquistócrona; 2019; Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática (RELIMAT)- Centro Universitário Municipal de Franca; Disponível para baixar em : <https://periodicos.unifacel.com.br/index.php/RELIMAT/article/view/1886/1343>.

Acesso em 28 de novembro de 2021.

[6] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2009 vol. 3.

[7] TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene, Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 2, 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[8] GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles P.; SAFKO, John L. Classical mechanics. 3. ed. Editora Addison Wesley, 2002.